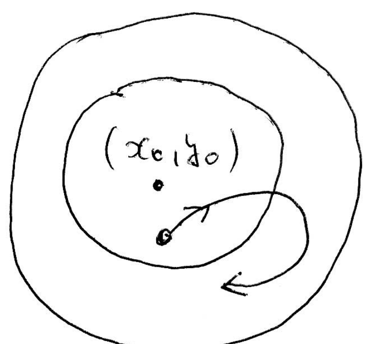
# Stabilnost i Grobman-Hartmanov teorem

Za dinamičke sustave važno je poznavanje ponašanje oko fiksnih (ravnotežnih, stacionarnih) točaka ili ekvilibrija. Iako se to može razmatrati općenito mi ćemo se reducirati na sustav dviju autonomnih jednadžba

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

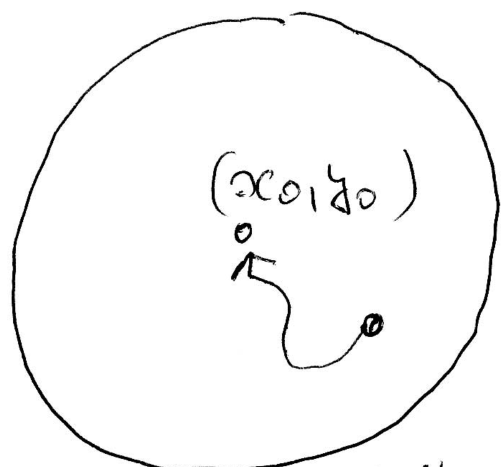
ili čak samo na jednu jednadžbu. Ima više definicija stabilnosti koje se razlikuju u detaljima, tako da je ovo samo jedna od mogućnosti (koja je dovoljna za ovu razinu problema).

**Stabilna ravnotežna točka**. Neka je $(x_0, y_0)$ ravnotežna točka, tj. neka je $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Kaže se da je ona stabilna (ili Ljapunov stabilna) ako svaka orbita koja počinje *blizu* te točke i ostaje *blizu* nje. Preciznije, kako god mali krug oko $(x_0, y_0)$ izabrali, možemo izabrati drugi (manji) krug tako da svaka orbita za koju je $(x(0), y(0))$ u drugom krugu ima svojstvo da je $(x(t), y(t))$ u prvom krugu, za sve $t \geq 0$ (sl. 1.).



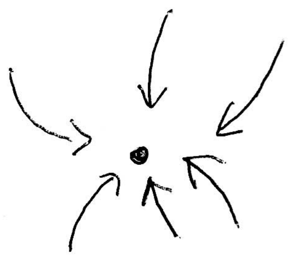

Sl. 1 Orbita koja počinje u manjem ne izlazi iz većeg kruga

Umjesto da se traži da orbita počinje u nekom krugu, može se tražiti da orbita ima točku u tom krugu (tj. ima stanje u tom krugu), a da onda sva stanja nakon toga budu u krugu.
Ako ravnotežna točka nije stabilna onda je ona nestabilna.
**Asimptotski stabilna ravnotežna točka**. Ravnotežna točka je asimptotski stabilna ako je stabilna i ako svaka orbita koja počinje dovoljno blizu te točke konvergira prema njoj (sl. 2.).




sl. 2. Orbita koja počinje blizu $(x_0,y_0)$ teži prema $(x_0,y_0)$.

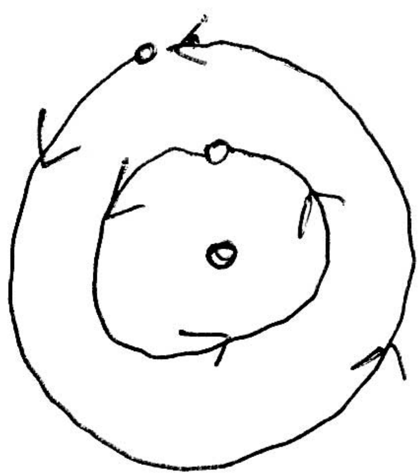
Intuitivno, ako je sustav u ravnotežnoj točki u nekom trenutku, ostat će u njoj i u budućnosti. Zamislimo da sustav pomaknemo iz ravnoteže (tj. da malko promijenimo vrijednosti veličina $x, y$). Tada možemo zamisliti više mogućnosti:
(**Ponor**) Sustav se vraća u ravnotežu. Kažemo da je ravnotežna točka ponor (atraktor, asimptotski stabilna ravnotežna točka) .
Sami ponor može biti čvor (node) ili žarište (fokus, spiralna privlačna točka) (sl.3.).



Sl. 3a) Ponor - čvor

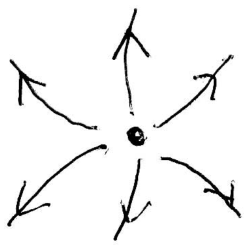
Sl. 3b
Ponor - fokus

(**Središte**) Sustav se ne vraća u ravnotežu, ali se ni ne udaljava od nje, već orbita kruži oko nje. Kažemo da je ravnotežna točka stabilna i to središte (centar) (sl. 4.).

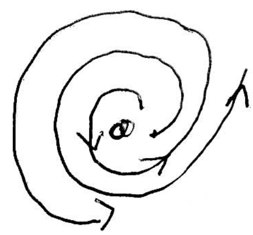


Sl. 4
Središte (centar)

(**Izvor**) Sustav se udaljava od ravnotežne točke. Kažemo da je ravnotežna točka nestabilna i to izvor ( odbijajuća točka).
Slično kao i ponor, izvor može biti čvor ili spiralna odbijajuća točka (sl. 5.).

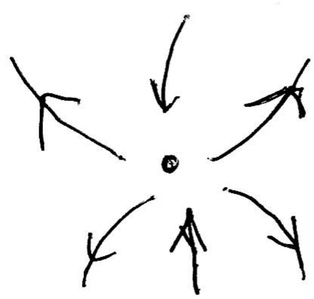


sl. 5a)
izvor - čvor



sl. 5 b)
Izvor - fokus
(žarište

(**Sedlo**) Sustav se u nekim slučajevima vraća u ravnotežu, a u nekima se udaljava od nje ovisno o tome kako smo malko poremetili ravnotežu. Kažemo da je ravnotežna točka nestabilna i to sedlo (sedlasta točka) (sl. 6.).

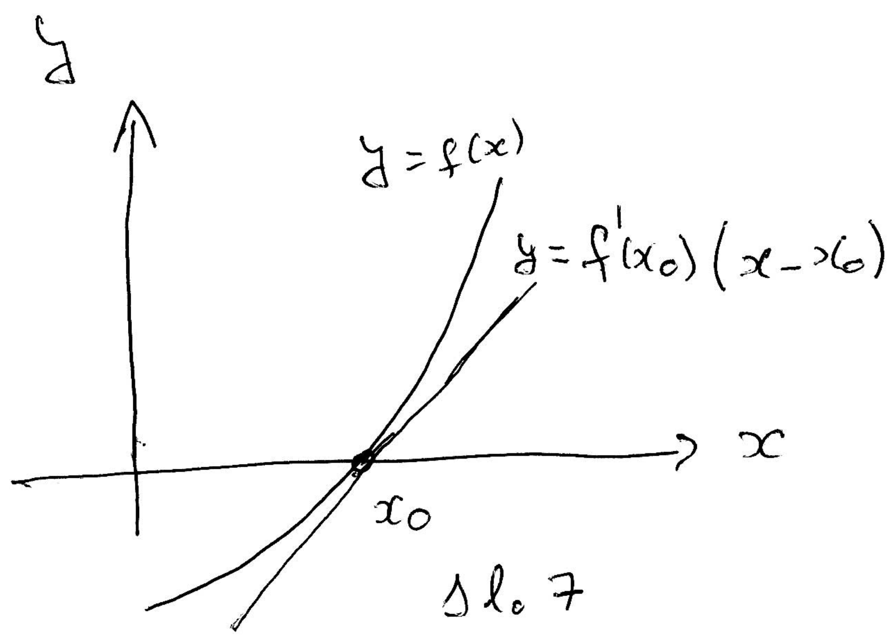


sl. 6 sedlo

Svi su ovi pojmovi **lokalni**, tj. vrijede na nekoj okolini ravnotežne točke. Iznimno, neko svojstvo može vrijediti za sve točke u području razmatranja sustava (to se može precizno definirati). Tada je ono globalno. Na primjer, ravnotežna točka je **globalni ponor** ako svaka orbita konvergira k njoj. Na primjer, razmatranja faznog portreta kemostata u slučaju kad je $R_2$ u prvom kvadrantu ukazuju na to da je $R_2$ globalni ponor.
Da dobijemo osjećaj o ovim pojmovima razmotrima jednodimenzijski autonomni dinamički sustav, tj. diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Realan broj $x_0$ je ravnotežna točka ako je $f(x_0) = 0$. Oko $x_0$ funkciju $f$ možemo aproksimirati linearnom funkcijom, tj. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, jer je $f(x_0) = 0$. Predpostavimo da je $f'(x_0) \neq 0$, tj. $f'(x_0) > 0$ ili $f'(x_0) < 0$. Odavde zaključujemo da je na malom intervalu oko $x_0$ vrijednost $f(x)$ ima isti predznak kao i $f'(x_0)(x - x_0)$ (sl. 7:).




Sl. 7

Zato je:
(a) Neka je $f'(x_0) > 0$.
(i) ako je $x > x_0$, tj. $x - x_0 > 0$, onda je $f(x) > 0$ pa je $\frac{dx}{dt} > 0$, pa $x$ raste, tj. udaljava se od $x_0$.
(ii) ako je $x < x_0$, tj. $x - x_0 < 0$, onda je $f(x) < 0$ pa je $\frac{dx}{dt} < 0$, pa $x$ pada, tj. udaljava se od $x_0$.
Zaključujemo da je za $f'(x_0) > 0$ točka $x_0$ nestabilna.
(a) Neka je $f'(x_0) < 0$.
(i) ako je $x > x_0$, tj. $x - x_0 > 0$, onda je $f(x) < 0$ pa je $\frac{dx}{dt} < 0$, pa $x$ pada, tj. približava se k $x_0$.
(ii) ako je $x < x_0$, tj. $x - x_0 < 0$, onda je $f(x) > 0$ pa je $\frac{dx}{dt} > 0$, pa $x$ raste, tj. približava se k $x_0$.
Zaključujemo da je za $f'(x_0) > 0$ točka $x_0$ stabilna (ona je i asimptotski stabilna, tj. $x \to x_0$ kad $t \to \infty$).
Uočimo da je $\frac{dx}{dt}$ derivacija od $x$ po $t$, a da $f'(x_0)$ znači derivaciju funkcije $f$ po $x$ izračunatu u $x_0$, tj. $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$.

**Linearizacija.** Za diferencijalnu jednadžbu $\frac{dx}{dt} = f(x)$ i zadani $x_0$, kažemo da je

$$\frac{dx}{dt} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

njena linearizacija oko $x_0$.
Slično, za dinamički sustav $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$; $\frac{dy}{dt} = g(x, y)$, i zadani $(x_0, y_0)$, njegova linearizacija oko $(x_0, y_0)$ jest sustav
$\frac{dx}{dt} = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$;
$\frac{dy}{dt} = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.
Ako se linearizacija vrši oko ravnotežne točke (što je uvijek slučaj kod razmatranja stabilnosti) onda je $f(x_0) = 0$, odnosno $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Vidjeli smo da je ravnotežna točka $x_0$ diferencijalne jednadžbe $\frac{dx}{dt} = f(x)$ asimptotski stabilna ako je $f'(x_0) < 0$, a nestabilna ako je $f'(x_0) > 0$. Analogan kriterij za dvodimenzijski sustav daje Grobman-Hartmanov teorem. Grubo govoreći, taj teorem tvrdi da se dinamički sustav (uz neke uvjete) ponaša oko ravnotežne točke slično poput pripadne linearizacije. Za precizno formuliranje tog teorema bilo bi potrebno uvodjenje nekih novih matematičkih pojmova, pa ćemo tim imenom mi nazivati sljedeću njegovu jednostavno formuliranu posljedicu. Prema analogiji na jednodimenzijski slučaj, taj će kriterij biti u terminima parcijalnih derivacija funkcija $f, g$ izračunatih u $(x_0, y_0)$.
**Grobman-Hartmanov teorem.** Neka je $(x_0, y_0)$ ravnotežna točka di-

namičkog sustava $\frac{dx}{dt} = f(x,y)$; $\frac{dy}{dt} = g(x,y)$, i neka je

$$J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

jakobijan (Jakobijeva matrica) lineariziranog sustava u $(x_0,y_0)$. Tada:
(i) Ako su svojstvene vrijednosti od $J(x_0,y_0)$ negativni realni brojevi ili kompleksno-konjugirani brojevi s negativnim realnim dijelom, onda je $(x_0,y_0)$ asimptotski stabilna.
(ii) Ako je bar jedna svojstvena vrijednost od $J(x_0,y_0)$ pozitivna ili kompleksno-konjugirani broj s pozitivnim realnim dijelom, onda je $(x_0,y_0)$ nestabilna.
Ako je neka od svojstvenih vrijednosti jednaka nuli ili čisto imaganiran broj (kompleksan broj s realnim dijelom jednakim nuli), situacija je složenija i nećemo je tu opisivati.
Podsjetimo da su za matricu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ svojstvene vrijednosti rješenja jednadžbe

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

tj. rješenje jednadžbe

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}A \cdot \lambda + \det A = 0,$$

gdje je $\mathrm{tr}A = a + d$ trag, a $\det A = ad - bc$ determinanta matrice $A$.
Sad se kriterij iz Grobman-Hartmanova teorema može zapisati i ovako:
(i)' Ako je $\mathrm{tr}J(x_0,y_0) < 0$ i $\det J(x_0,y_0) > 0$, onda je $(x_0,y_0)$ asimptotski stabilna ravnotežna točka.
(ii)' Ako je $\mathrm{tr}J(x_0,y_0) > 0$ ili $\det J(x_0,y_0) < 0$, onda je $(x_0,y_0)$ nestabilna ravnotežna točka.
Slučaj kad je $\mathrm{tr}J(x_0,y_0) = 0$ ili $\det J(x_0,y_0) = 0$, ispituje se posebnim metodama.
**Primjer.** Grobman-Hartmanov teorem ilustrirat ćemo na primjeru kemostata; pokazat ćemo da je ravnotežna točka $R_2(\alpha_1(\alpha_2 - \frac{1}{\alpha_1 - 1}), \frac{1}{\alpha_1 - 1})$ ponor (mi smo složenijim razmatranjima pokazali da je to i globalni ponor). Sjetimo se da je riječ o sustavu

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha_1 \frac{y}{y+1} x - x, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{y}{y+1} x - y + \alpha_2.$$

Ako desne strane diferencijalnih jednadžba označimo kao $f(x,y), g(x,y)$ dobijemo:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_1 \frac{y}{y+1} - 1$ pa je $\frac{\partial f}{\partial x}(R_2) = 0$. Ostale parcijalne derivacije nećemo morati računati u $R_2$. Naime,
$\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha_1 \frac{x}{(y+1)^2}$ , $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{y+1} - 1$ , $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{(y+1)^2} - 1$. zato je

$$J(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \frac{x}{(y+1)^2}(R_2) \\ -(\frac{y}{y+1} + 1)(R_2) & -(\frac{x}{(y+1)^2} + 1)(R_2) \end{pmatrix}.$$

Kako je $R_2$ u prvom kvadrantu i $\alpha_1 > 0$, zaključujemo da je $\mathrm{tr} J(R_2) = -(\frac{x}{(y+1)^2} + 1)(R_2) < 0$ i $\det J(R_2) = \alpha_1 \frac{x}{(y+1)^2}(R_2) \cdot (\frac{y}{y+1} + 1)(R_2) > 0$, pa je $R_2$ ponor.